NÚMEROS COMPLEJOS

Definición

Se puede considerar C como el conjunto de los pares ordenados de números reales z=(x,y) con las siguientes operaciones:

Elemento neutro: $0 = (0,0)$

Elemento opuesto: $-z = (-x,-y)$

Elemento unidad: $1 = (1,0)$

Elemento inverso: $\frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$, siempre que $z \neq 0$

Otras formas de representar los números complejos

<u>Forma binómica.</u>

Podemos considerar C como un **<u>espacio vectorial</u>** isomorfo a R^2 , de este modo se tiene:

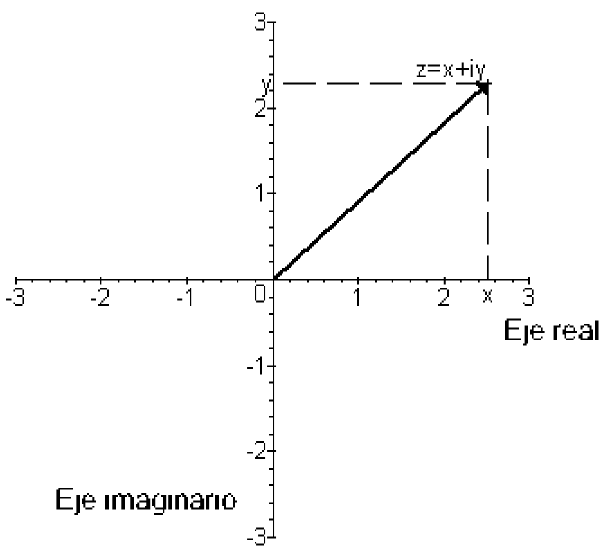
$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1) = x + iy$$

Gráficamente podemos representar R^2 (y por tanto C) como un plano.

Para cada número complejo z, la primera componente, x, se denomina **parte real** y la segunda, y, se denomina **parte imaginaria**.

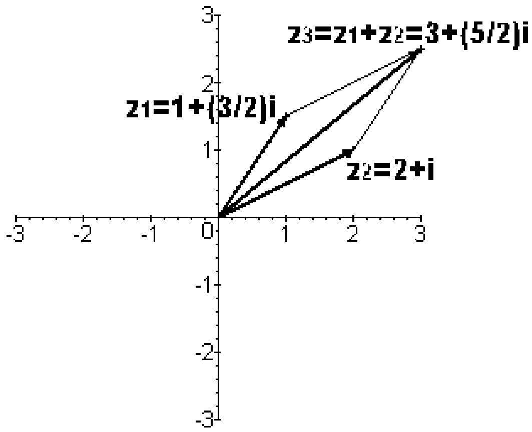
Obviamente, dos números complejos son iguales si y sólo si lo son simultáneamente sus partes reales y sus partes imaginarias.

<u>EL PLANO COMPLEJO</u>



Usando este tipo de representación, la suma de complejos se corresponde con la suma de vectores. Dados dos vectores $z_2 = x_2 + iy_2$, y $z_1 = x_1 + iy_1$, entonces su suma es $z_3 = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

SUMA DE COMPLEJOS EN FORMA BINÓMICA

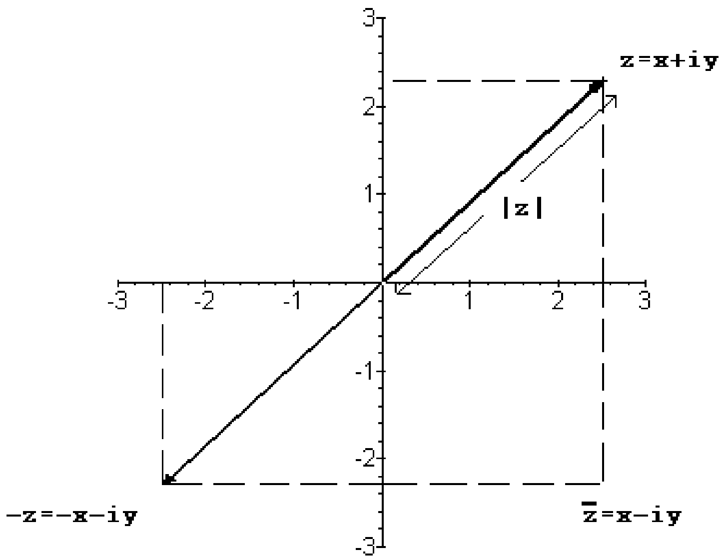


Se define el **módulo** de un número complejo como el módulo del vector que lo representa, es decir, si $z = x + iy$, entonces el módulo de z es $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

El **conjugado** de un número complejo se define como su simétrico respecto del eje real, es decir, si $z = x + iy$, entonces el conjugado de z es $\bar{z} = x - iy$

El **opuesto** de un número complejo es su simétrico respecto del origen, es decir, si $z = x + iy$, entonces el opuesto de z es: $-z = -x - iy$

MÓDULO, CONJUGADO Y OPUESTO DE UN NÚMERO COMPLEJO



Es fácil ver que se cumple, $z\bar{z} = |z|^2$, por tanto podemos expresar el inverso de un número $z \neq 0$ en la forma $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

En vez de usar coordenadas cartesianas para representar a los puntos del plano podemos usar coordenadas polares, lo que da lugar a la siguiente forma de representación de los números complejos.

Forma polar o módulo-argumento

Otra forma de expresar un número complejo es la forma polar o forma módulo-argumento.

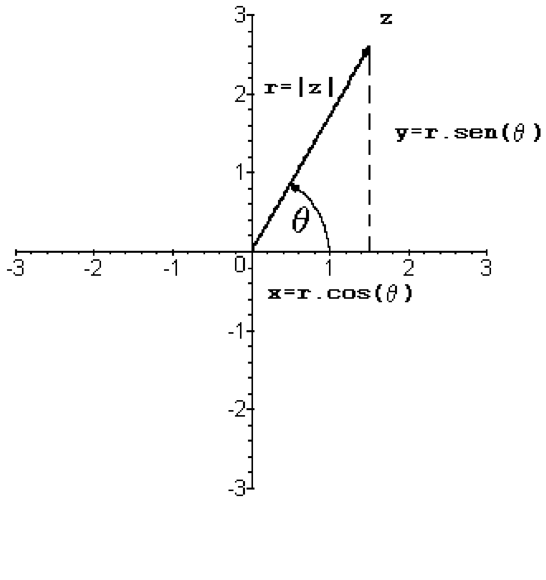
$$Z = |Z| \angle \theta$$

donde $|Z|$ es el módulo de Z, y donde θ es un **argumento** de z, esto es, θ es un ángulo tal que

$$tag\theta = \frac{y}{x}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{|z|}, \qquad sen\theta = \frac{y}{|z|}. \qquad \text{Luego:}$$

$$\theta = arctag\frac{y}{x}, \qquad \theta = \arccos\frac{x}{|z|}, \qquad \theta = arcsen\frac{y}{|z|}$$

FORMA POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO



Dos números complejos

$$z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\theta_1) \text{ y } z_2 = |z_2|(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\theta_2)$$

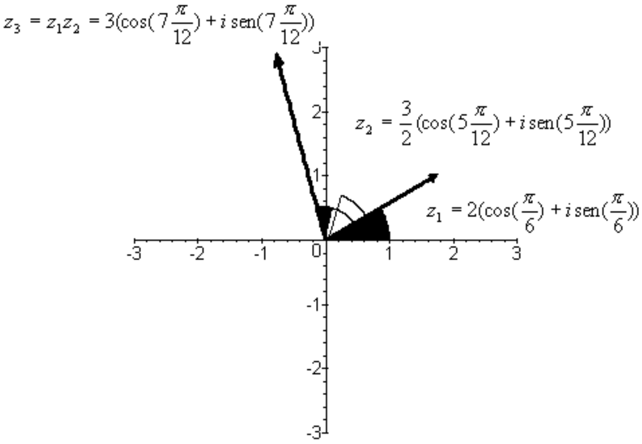
representados en forma polar son iguales si y sólo si sus módulos son iguales $|z_1| = |z_2|$, y sus argumentos se diferencian en un número entero de vueltas, es decir, $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$, con $k \in Z$.

La forma polar de un número complejo es especialmente cómoda a la hora de multiplicar, ya que basta con multiplicar los módulos y sumar los argumentos. Es decir, si $Z_1 = |Z_1| \angle \alpha$, y $Z_2 = |Z_2| \angle \theta$, entonces

$$Z_1 * Z_2 = |Z_1| * |Z_2| \angle \alpha + \theta$$

Del mismo modo se puede calcular el cociente de un complejo por otro no nulo sin más que dividir los módulos y restar los argumentos:

PRODUCTO DE COMPLEJOS EN FORMA POLAR



$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 - \theta_2))$$

siempre que $z_2 \neq 0$

Cambio de forma binómica a polar y viceversa

Cambio de binómica a polar

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \mathrm{sen}\,\theta &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}$$

Cambio de polar a binómica

$$x = |z| \cos\theta$$
$$y = |z|\,\mathrm{sen}\,\theta$$

CIRCUITOS RLC

Circuito resistivo R en corriente alterna

Impedancia de una resistencia

Se llama IMPEDANCIA (Z) de un elemento cualquiera a la oposición que ofrece al paso de una corriente alterna. En el caso de un resistor la impedancia se llama **resistencia**:

Z = R En forma polar: R $|\underline{0^\circ}$, en forma binómica: R + 0i

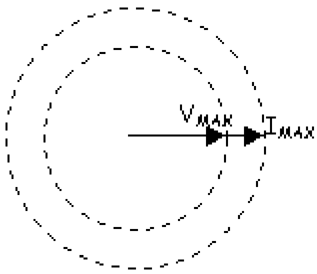
La **Resistencia** se mide en ohmios (Ω) y se representa en el eje de los **números reales parte positiva**, es decir, es un vector con 0º de argumento.

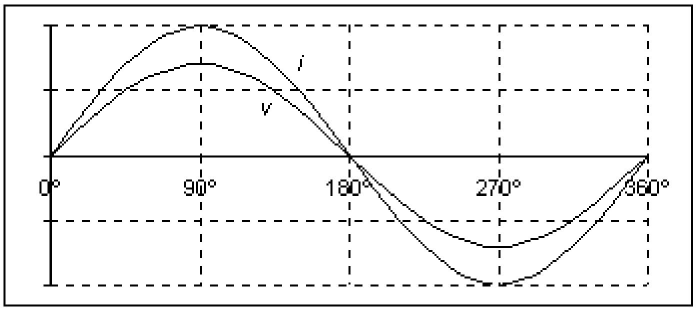
Ley de Ohm generalizada a corriente alterna

$v = Z \cdot i$ en el caso de una resistencia $v = R \cdot i$ En forma compleja: $v\ |\underline{0^{\circ}} = Z\ |\underline{0^{\circ}} \cdot i\ |\underline{0^{\circ}}$

Al circular una corriente alterna por una resistencia da lugar a una tensión alterna en sus extremos.

LA TENSIÓN Y LA CORRIENTE QUE CIRCULA POR UNA RESISTENCIA ESTÁN <u>EN FASE</u>





Circuito inductivo L en corriente alterna

Las bobinas también llamadas inductores, son componentes pasivos que almacenan energía eléctrica en forma de campo magnético y responden linealmente a los cambios de corriente. Por lo tanto, en presencia de una corriente continua constante se comportan como cortocircuitos.

En su forma más simple, una bobina está constituida por un alambre de cierta longitud enrollado en forma de hélice sobre un núcleo. Algunas veces incluyen también un carrete aislante intermedio llamado formaleta que aloja el arrollamiento y lo separa eléctricamente del núcleo.

La operación de las bobinas se basa en un principio de la teoría electromagnética, según el cual, cuando circula una corriente a través de un conductor, este produce a su alrededor un campo magnético.

Las líneas de fuerza que representan el campo magnético son perpendiculares a la dirección del flujo de la corriente. Si doblamos en algún punto el alambre para formar un bucle o espira, el campo magnético en esa parte del alambre se concentra dentro de la espira puesto que todas las líneas de fuerza apuntan en la misma dirección y convergen hacia el centro. Por lo tanto, si continuamos agregando espiras, formando una bobina, los campos magnéticos creados por cada una se reforzaran mutuamente, configurando así un campo de mayor intensidad en el interior del sistema, el conjunto se comporta entonces como un electroimán.

El campo magnético creado por una bobina de núcleo de aire como la anterior puede ser intensificado aumentando la corriente aplicada o llenando el espacio vacío dentro de la misma con un núcleo de material magnético, que concentre mejor las líneas de fuerza. Otra es construyendo la bobina en múltiples capas, es decir realizando un nuevo devanado encima del primer arrollamiento, uno encima del segundo, y así sucesivamente.

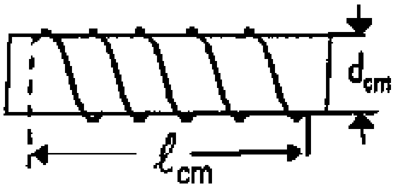
El campo magnético creado por una bobina depende linealmente de la corriente aplicada. Cuando se incrementa esta corriente, el flujo aumenta y viceversa, como resultado, se genera entre los terminales de la bobina un voltaje que se opone a la variación del flujo. La capacidad de una bobina, para oponerse a ese cambio, se denomina auto inductancia o **coeficiente de**

autoinducción y es una característica intrínseca del dispositivo, el coeficiente de autoinducción (L) de las bobinas se mide en Henrios (H) y su valor depende de:

n =Nº de espiras de la bobina

l =Longitud del bobinado

d =Diámetro del soporte



Podemos calcular el valor aproximado del coeficiente de autoinducción de la bobina en el caso de que su núcleo sea de aire mediante la expresión:

Donde: L es el coeficiente de autoinducción en μH

$$L(uH)=\frac{n^2 d}{102(l/d)+45}$$

Hay varios símbolos de bobinas, aquí podemos ver uno:

Impedancia de una bobina

Se llama IMPEDANCIA (Z) de un elemento cualquiera a la oposición que ofrece al paso de una corriente alterna. En el caso de una bobina la impedancia se llama **reactancia inductiva** o **inductancia**: (x_L)

$Z = \mathbf{x_L = \omega \cdot L}$ En forma polar: $X_L\ |\underline{90º}$; en forma binómica: $0 + X_L i$

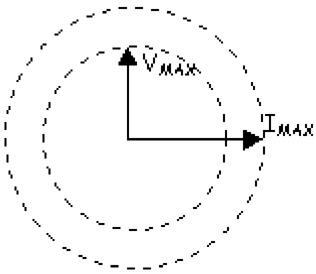
$\omega = 2\pi f$ = Pulsación angular luego $X_L = 2\pi fL$

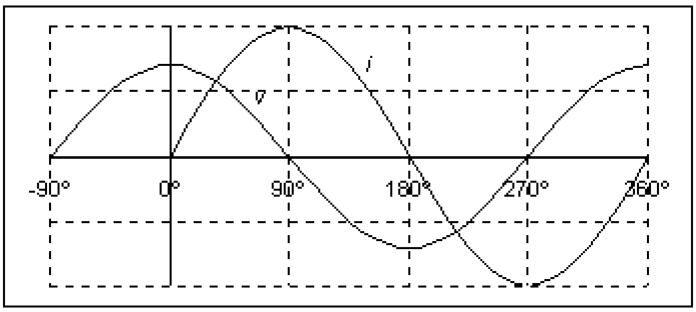
La **Reactancia Inductiva** se mide en ohmios (Ω) y se representa en en el eje de los **números imaginarios parte positiva**, es decir, es un vector con 90º de argumento.

Ley de Ohm generalizada a corriente alterna

$v = z \cdot i$ en el caso de una bobina $v_L = X_L \cdot i$ En forma compleja: $v|\underline{90º} = z\ |\underline{90º} \cdot i\ |\underline{0º}$

LA TENSIÓN EN EXTREMOS DE UNA BOBINA ESTÁ <u>ADELANTADA 90º</u> RESPECTO A LA INTENSIDAD QUE CIRCULA POR ELLA





Debido a que las bobinas están construidas normalmente con hilo de cobre, estas presentan una resistencia ohmica pura (r_i) que puede influir en la impedancia de estas, entonces se considera que:

$$z_L = r_i + x_L i$$

Es decir, se considera que la resistencia interna (r_i), está en serie con X_L

Circuito capacitivo C en corriente alterna

Impedancia de un condensador

Se llama IMPEDANCIA (Z) de un elemento cualquiera a la oposición que ofrece al paso de una corriente alterna. En el caso de un condensador la impedancia se llama **reactancia capacitiva** o **capacitancia**:

$Z = X_c = \dfrac{1}{\omega C}$ En forma polar: Z $|\underline{-90º}$ En forma binomica $0 - \dfrac{1}{\omega C} i$

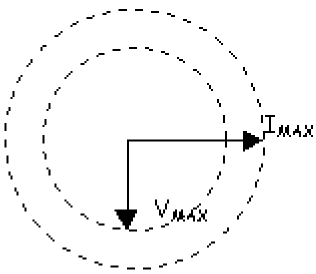
La **Reactancia Capacitiva** se mide en ohmios (Ω) y se representa en en el eje de los **números imaginarios parte negativa**, es decir, es un vector con -90º de argumento.

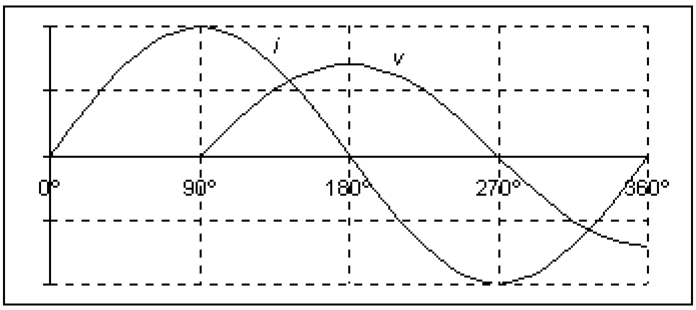
Ley de Ohm generalizada a corriente alterna

V = Z · I para un condensador $vc = i * \dfrac{1}{\omega C} i$ En forma compleja: V$|\underline{-90º}$ = Z $|\underline{-90º}$ · I $|\underline{0º}$

Al circular una corriente alterna por un condensador da lugar a una tensión alterna en sus extremos.

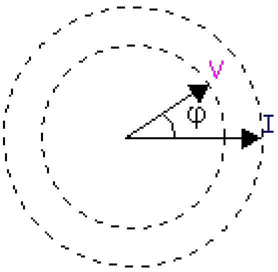
LA TENSIÓN EN EXTREMOS DE UN CONDENSADOR ESTÁ <u>RETRASADA 90º</u> RESPECTO A LA INTENSIDAD QUE CIRCULA POR EL



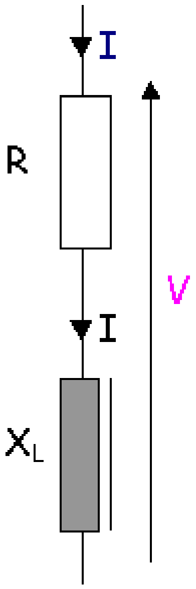


Circuito RL serie en corriente alterna

Al circular una corriente alterna por una resistencia y una bobina en serie da lugar a una tensión alterna en extremos del circuito, suma vectorial de la tensión en cada elemento.



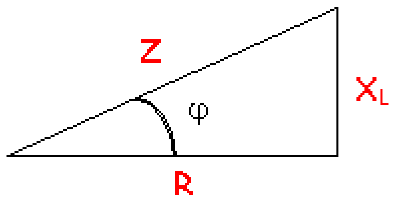
LA TENSIÓN EN EXTREMOS DE UN CIRCUITO **RL** ESTÁ ADELANTADA φ º RESPECTO A LA INTENSIDAD QUE CIRCULA POR ÉL, SIENDO 0º < φ < 90º



Impedancia de un circuito RL

Se llama IMPEDANCIA (Z) de un circuito a la oposición que ofrece al paso de una corriente alterna. En el caso de un circuito RL la impedancia total tiene un valor que responde a la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene por catetos la resistencia y la inductancia:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2}$$



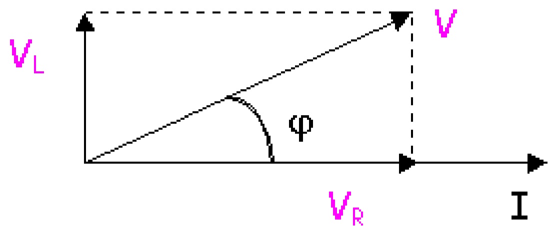
En forma compleja:

$Z \underline{|\varphi^{\circ}} = R + \omega \cdot L \cdot i$

Ley de Ohm generalizada a corriente alterna

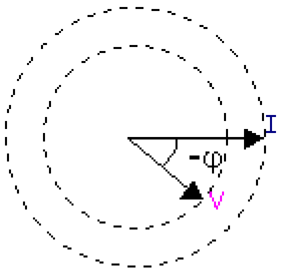
V = Z · I en el caso de un circuito RL $V = \sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2} \cdot I$

En forma compleja: $V\underline{|\varphi^{\circ}} = Z \underline{|\varphi^{\circ}} \cdot I \underline{|0^{\circ}}$

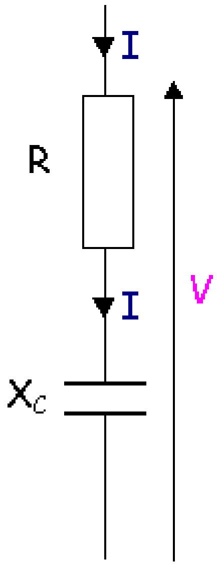


Circuito RC serie en corriente alterna

Al circular una corriente alterna por una resistencia y un condensador en serie da lugar a una tensión alterna en extremos del circuito, suma vectorial de la tensión en cada elemento.



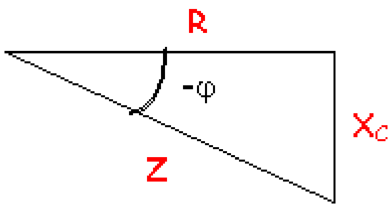
LA TENSIÓN EN EXTREMOS DE UN CIRCUITO **RC** ESTÁ <u>RETRASADA</u> $-\varphi$ º RESPECTO A LA INTENSIDAD QUE CIRCULA POR ÉL, SIENDO $-90^\circ < -\varphi < 0^\circ$



Impedancia de un circuito RC

Se llama IMPEDANCIA (Z) de un circuito a la oposición que ofrece al paso de una corriente alterna. En el caso de un circuito RC la impedancia total tiene un valor que responde a la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene por catetos la resistencia y la capacitancia:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}$$

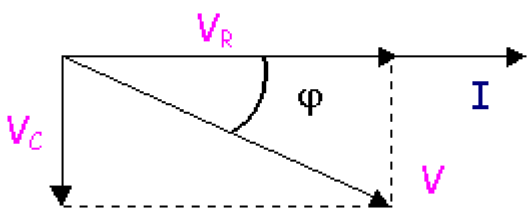


En forma compleja: $Z\,|\underline{-\varphi^\circ} = R - (1/\omega \cdot C)\cdot i$

Ley de Ohm generalizada a corriente alterna

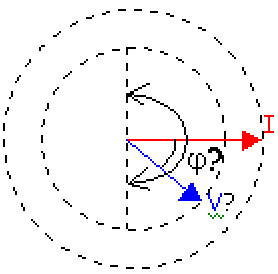
V = Z · I en el caso de un circuito RC $V = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} \cdot I$

En forma compleja: $V|\underline{-\varphi^\circ} = Z\,|\underline{-\varphi^\circ} \cdot I\,|\underline{0^\circ}$

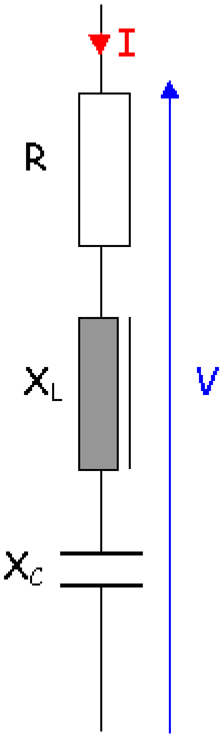


Circuito RLC serie en corriente alterna

Al circular una corriente alterna por una resistencia, una bobina y un condensador en serie da lugar a una tensión alterna en extremos del circuito, suma vectorial de la tensión en cada elemento.

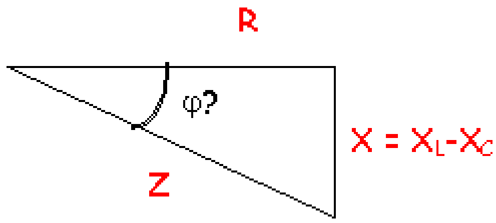


LA TENSIÓN EN EXTREMOS DE UN CIRCUITO **RLC** ESTÁ DEFASADA φ º RESPECTO A LA INTENSIDAD QUE CIRCULA POR ÉL, SIENDO $-90^\circ < \varphi < 90^\circ$



Impedancia de un circuito RLC

Se llama IMPEDANCIA (Z) de un circuito a la oposición que ofrece al paso de una corriente alterna. En el caso de un circuito RLC la impedancia total tiene un valor que responde a la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene por catetos la resistencia y la reactancia (inductancia menos capacitancia):



$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}$$

En forma compleja:

$Z\,|\varphi^\circ = R + [\,\omega \cdot L - (1/\omega \cdot C)]\cdot i$

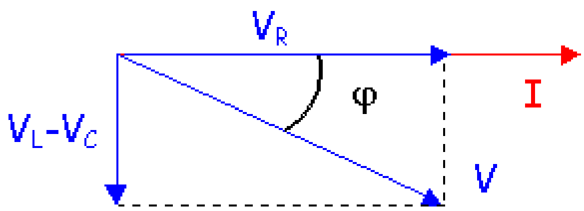
El ángulo será positivo si predomina la inductancia sobre la capacitancia y negativo si sucede al contrario.

Ley de Ohm generalizada a corriente alterna

$V = Z \cdot I$ en un circuito RLC

$$V = \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} \cdot I$$

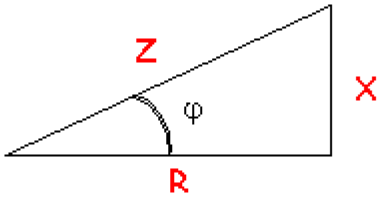
En forma compleja: $V|\varphi^\circ = Z\,|\varphi^\circ \cdot I\,|0^\circ$



Impedancia compleja en corriente alterna

La impedancia como cualquier número complejo puede darse por su módulo y ángulo o bien por su resistencia (parte real) y reactancia (parte imaginaria):

TRIÁNGULO DE IMPEDANCIAS



MÓDULO $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$

ÁNGULO $\varphi = arc\ tan \frac{X}{R}$

RESISTENCIA $R = Z \cdot \cos \varphi$

REACTANCIA $X = Z \cdot \text{sen}\ \varphi$

Forma polar: Z |φ_ *Forma binómica*: R + X·i

A su vez, la reactancia será la combinación de la inductancia y la capacitancia:

$$X = X_L - X_C = \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}$$

Al circular una corriente alterna por una impedancia produce una tensión alterna en sus extremos:

De módulo: $V = Z \cdot I = \sqrt{R^2 + X^2} \cdot I$

Desfasada de I: $\varphi = arc\ tan \frac{X}{R}$

Las impedancias se pueden asociar en serie y en paralelo de igual forma que las resistencias, siendo válidas las fórmulas aplicadas a aquellas, a condición de operar en forma compleja:

SERIE PARALELO

$$Z_T = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \cdots \qquad Z_T = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \cdots}$$

Resonancia

Se dice que un circuito RLC está en resonancia cuando para un valor determinado de frecuencia (f), el valor de la reactancia inductiva (X_L) es igual al valor de la reactancia capacitiva (X_C), es decir : $(X_L) = (X_C)$, entonces: $\omega L = \frac{1}{\omega C}$, luego $\omega^2 = \frac{1}{LC}$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad 2\pi f = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

CIRCUITOS RLC
CIRCUITO RL SERIE

1º.- En el circuito de la figura, calcular los valores de X_L, Z_t, i_t, v_r y v_l, anotarlos en la **tabla 1**.

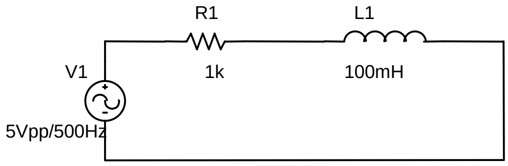


Figura 1

		X_L	Z_t	i_t	v_r	v_L
Calculado	Polar					
	Binómica					
Medido *	Polar				**	**

Tabla 1

* Para obtener la fase debemos comparar señales como se realiza en el apartado 4.
** Indicar la fase comparándola con v_t.

2º.- Dibujar el diagrama vectorial de impedancias o triangulo de impedancias, el diagrama de tensión-corriente y el diagrama de tensiones.

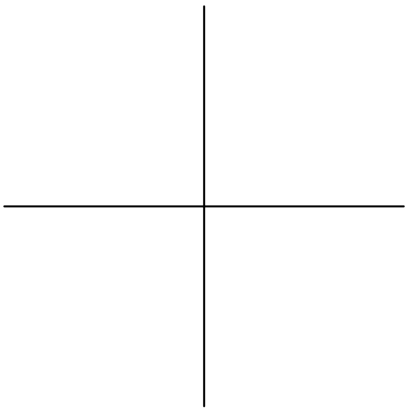


Diagrama de Impedancias

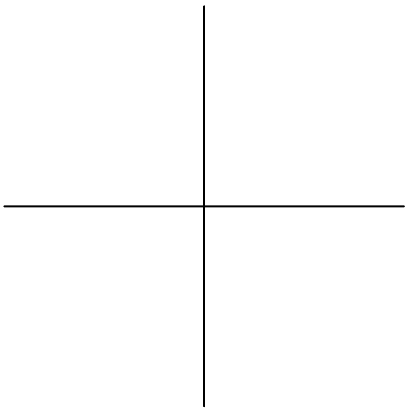


Diagrama tensión-corriente

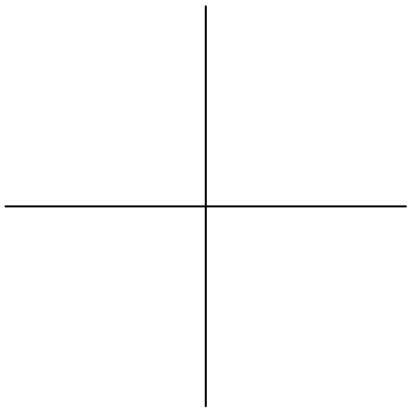


Diagrama de tensiones

3º.- Montar el circuito de la **figura 1**, medir i_t, v_r y v_l, anotar las medidas en la **tabla 1.** Comparar los resultados con los obtenidos en los cálculos.

4º.- Visualizar en el osciloscopio v_r y v_l, determinar el tiempo de desfase entre ambas y mediante una regla de tres obtener el desfase en grados, de la manera siguiente:

1 ciclo de la señal (tiempo) ---------------son 360º

El tiempo de desfase ----------------------serán Xº

Comparar el desfase en grados obtenido con el representado en el diagrama de tensiones.

CIRCUITO RC SERIE

5º.- En el circuito de la figura, calcular los valores de X_c, Z_t, i_t, v_r y v_c, anotarlos en la **tabla 2**.

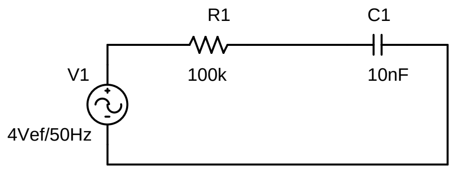


Figura 2

		Xc	Zt	it	vr	vc
Calculado	Polar					
	Binómica					
Medido *	Polar				**	**

Tabla 2

*   Para obtener la fase debemos comparar señales como se realiza en el apartado 4.
** Indicar la fase comparándola con v_t.

6º.- Dibujar el diagrama vectorial de impedancias o triangulo de impedancias, el diagrama de tensión-corriente y el diagrama de tensiones.

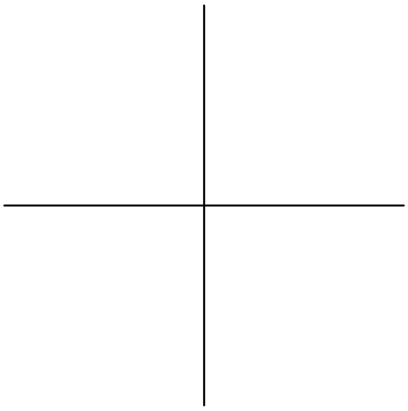


Diagrama de Impedancias

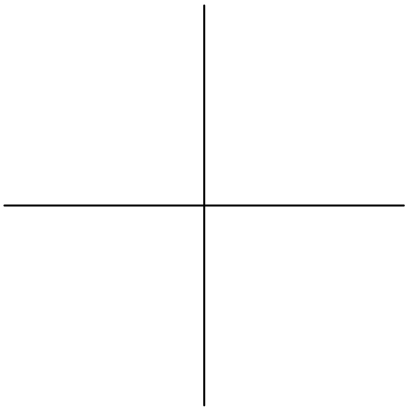


Diagrama tensión-corriente

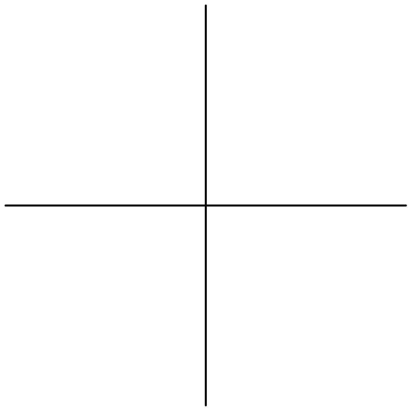


Diagrama de tensiones

7º.- Montar el circuito de la **figura 2**, medir i_t, v_r y v_c, anotar las medidas en la **tabla 2.** Comparar los resultados con los obtenidos en los cálculos.

RESONANCIA SERIE

8º.- En el circuito de la figura, calcular los valores de X_L, X_c, Z_t, i_t, v_r, v_L y v_c, anotarlos en la **tabla 3**.

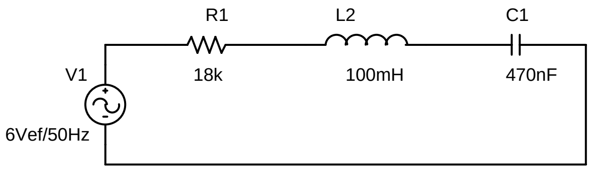


Figura 3

		X_L	X_c	Z_t	i_t	v_r	v_L	v_c
Calculado	Polar							
	Binómica							
Medido (Sin fase)								

Tabla 3

9º.- Dibujar el diagrama vectorial de impedancias o triangulo de impedancias, el diagrama de tensión-corriente y el diagrama de tensiones.

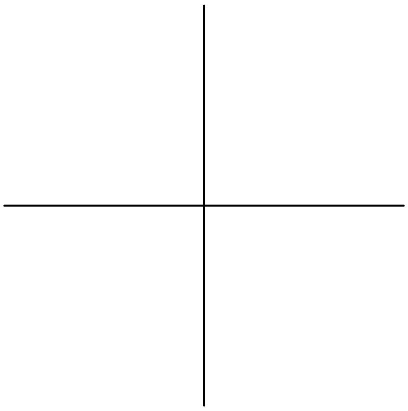


Diagrama de Impedancias

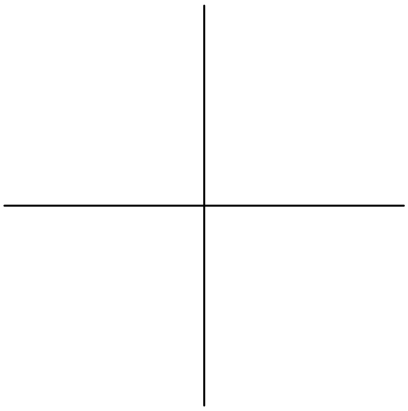


Diagrama tensión-corriente

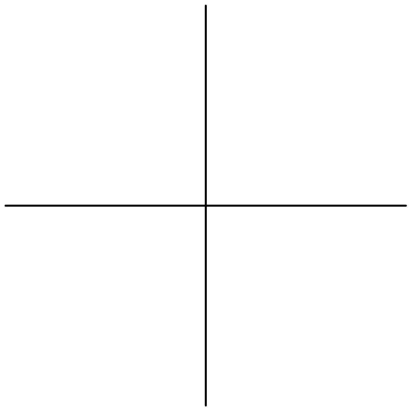


Diagrama de tensiones

10º.- Montar el circuito de la **figura 3**, medir i_t, v_r, v_L y v_c, anotar las medidas en la **tabla 3.** Comparar los resultados con los obtenidos en los cálculos.

11º.- Variar la frecuencia del generador a 10783Hz, calcular los valores de X_L, X_c, Z_t, i_t, v_r, v_L y v_c, anotarlos en la **tabla 4**.

		X_L	X_c	Z_t	i_t	v_r	v_L	v_c
Calculado	Polar							
	Binómica							
Medido (Sin fase)								

Tabla 4

12º.- Dibujar el diagrama vectorial de impedancias o triangulo de impedancias, el diagrama de tensión-corriente y el diagrama de tensiones.

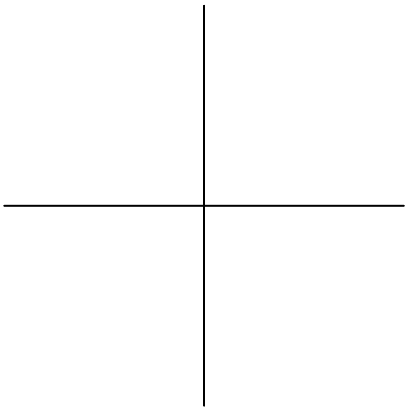


Diagrama de Impedancias

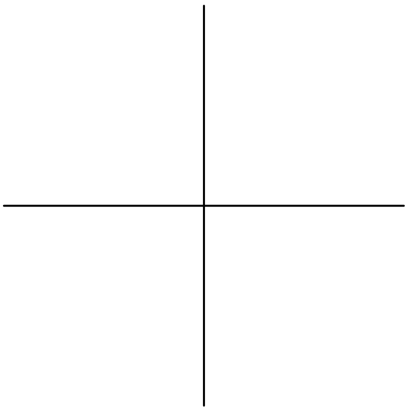


Diagrama tensión-corriente

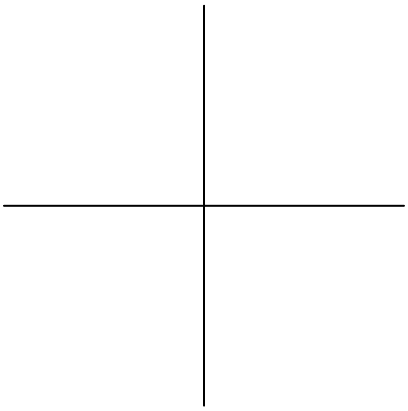


Diagrama de tensiones

13º.- Calcular la frecuencia a la que el circuito entra en resonancia, calcular los valores de X_L, X_C, Z_t, i_t, v_r, v_L y v_C, anotarlos en la **tabla 5**.

		X_L	X_c	Z_t	i_t	v_r	v_L	v_C
Calculado	Polar							
	Binómica							
Medido	(Sin fase)							

Tabla 5

14º.- Dibujar el diagrama vectorial de impedancias o triangulo de impedancias, el diagrama de tensión-corriente y el diagrama de tensiones.

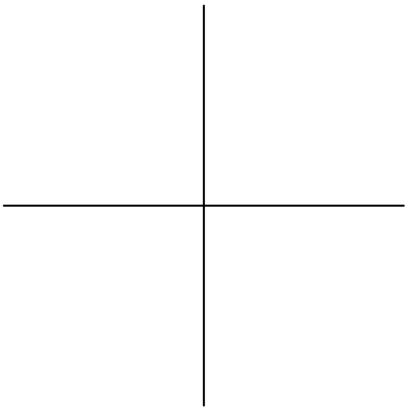


Diagrama de Impedancias

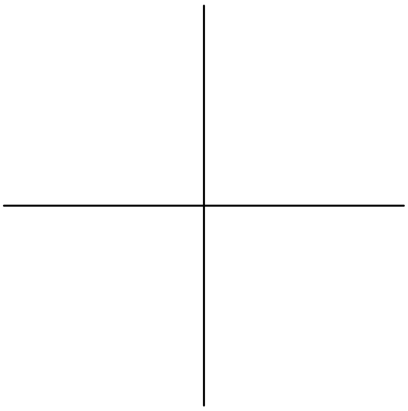


Diagrama tensión-corriente

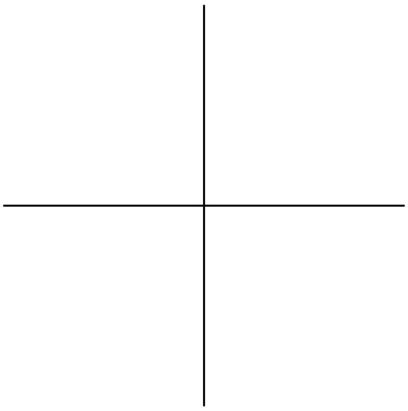


Diagrama de tensiones

15º.- Ajustar el generador a la frecuencia de resonancia, medir i_t, v_r, v_L y v_C, anotar las medidas en la **tabla 5.** Comparar los resultados con los obtenidos en los cálculos.